حل نموذج بجروت

581 (806)

موعد صيف (ب)

2021

طاقم الرياضيات

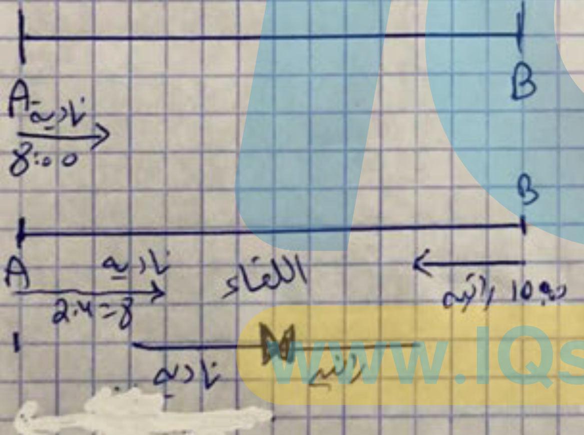
معهد IQ

حل سؤال 1

(أ) بحسب المعطيات نفهم النقاط التالية:-

* نادية خرجت من النقطة A باتجاه النقطة B الساعة 8:00 وسارت بسرعة 4 كم/س.
* دالية خرجت الساعة 9:36 من النقطة B الى النقطة A وسارت بسرعة ثابتة
* رانية خرجت من النقطة B باتجاه A بعد ساعتين من خروج نادية اي بالساعة 10:00 وسارت بسرعة 12 كم/س.
* التقت نادية ورانية وواصلتا طريقهما
* بعد ساعة و 36 دقيقة من لقاء نادية ورانية وصلت دالية الى A.
* البعد بين A و B هو 40 كم

نرسم وضع تقريبي للوضع الموصوف بالسؤال



* عندما خرجت رانية من B كانت نادية على بعد $2\cdot4=8$ km عن A

نفرض ان الزمن الذي سارته رانية منذ الساعة 10 وحتى اللقاء هو t

اذا قطعت مسافة مقدارها 12t حتى اللقاء

في نفس المدة الزمنية قطعت نادية مسافة 4t

ويتحقق:

$$\underbrace{8+4t}_{\text{مسافة نادية}}+\underbrace{12t}_{\text{مسافة رانية}}=40$$

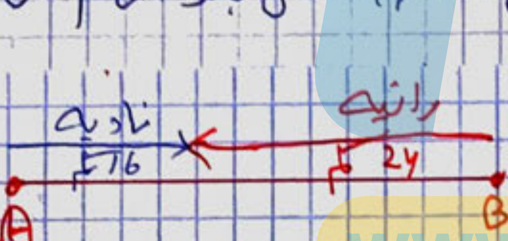
$$\Rightarrow 16t=40-8 \Rightarrow 16t=32 \rightarrow \boxed{t=2}$$

اي انه التقت رانية ونادية بعد ساعتين من خروج رانية

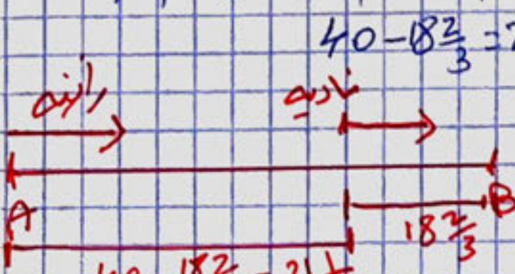
اي الساعة $\boxed{12:00}$

ب- دالية خرجت الساعة 9:36 وحتى الالتقاء بين رانية ونادية
في الساعة 12:00 سارت مدة $2\frac{24}{60}$ ساعة أي 2.4 ساعة
وبعد ذلك سارت مدة $1\frac{36}{60}$ ساعة أي 1.6 ساعة حتى وصلت
الى A أي انه بالمجموع سارت مدة 4 ساعات. وقطعت كل
المسافة بين B و A أي 40 كم.
نفرض سرعة دالية V_D اذا يتحقق $4\cdot V_D=40 \Leftarrow \boxed{V_D=10}$
اذا سرعة دالية هي 10 كم/س.

ج- رانية ونادية التقتا الساعة 12:00 وكان ذلك على بعد
$2\cdot12=24$, أي 24 كم عن B (المسافة التي قطعتها رانية حتى الالتقاء)
نفحص هل ممكن ان تكون دالية على بعد 24 كم عن B بهذه
الساعة (12):
حتى الساعة 12 سارت دالية مدة $2\frac{24}{60}$ ساعة أي 2.4
وخلال هذه المدة تقطع مسافة $10\cdot(2.4) \Leftarrow 24$ كم
أي دالية تلتقي مع نادية ورانية بنفس النقطة على بعد 24 كم عن B.



عند اللقاء الساعة 12 كانت رانية
على بعد 16 كم من A ونادية على
بعد 24 كم من B. حتى تصل رانية الى A تحتاج $\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$ ساعة
وبهذه المدة تقطع نادية مسافة $4\cdot\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$ أي $5\frac{1}{3}$ كم
وتصبح على بعد $24-5\frac{1}{3} \Leftarrow 18\frac{2}{3}$ كم عن B. ومنذ هذه
اللحظة (وصول رانية الى A) تستدير وتبدأ بالركض باتجاه
B والمسافة بينهم في هذه اللحظة هي $40-18\frac{2}{3}=21\frac{1}{3}$



اذا تبدأ رانية ونادية تركضان بنفس
الاتجاه من A الى B والمسافة بينهم
هي $21\frac{1}{3}$ كم ولكي تلحق رانية بنادية يجب
ان تقلص هذه المسافة اي يتحقق: $12t-4t=21\frac{1}{3}$ $\Leftarrow 8t=21\frac{1}{3} \Leftarrow \boxed{t=\frac{8}{3}}$
وبهذه المدة تقطع رانية مسافة $\frac{8}{3}\cdot12=32$ كم
وبالتالي تكون على بعد 8 كم من B (40-32)

حل سؤال 2

1.أ بحسب المعطيات a_n لا نهائية هندسية وأساسها q.

$$A = a_2 + a_4 + \dots + a_{40}$$

اي ان A هو مجموع الحدود الزوجية من المتوالية a_n حتى الحد 40. اي عبارة عن مجموع أول 20 حد زوجي من a_n.
الحد الاول في المجموع هو $a_2 = a_1 \cdot q$ وبالتالي يتحقق:

$$A = a_1 \cdot q \cdot \frac{(q^2)^{20}-1}{q^2-1} \longleftarrow$$ (اساس المتوالية هو q^2 في الاماكن الزوجية)

$$\boxed{A = \frac{q^{40}-1}{q^2-1} \cdot a_1 q}$$

2.أ
$$B = a_4 + a_8 + a_{12} + \dots + a_{40}$$

اي أن B مجموع الحدود التي ترتيبها يقسم على 4 من المتوالية a_n وحتى الحد 40. أي أن B عبارة عن مجموع 10 حدود من متوالية جديدة حدها الأول $a_4 = a_1 q^3$ وأساسها $\frac{a_8}{a_4} = q^4$
وبالتالي يتحقق:

$$B = a_1 q^3 \cdot \frac{(q^4)^{10}-1}{q^4-1} = a_1 q^3 \cdot \frac{q^{40}-1}{q^4-1}$$

$$\boxed{B = a_1 q^3 \frac{q^{40}-1}{q^4-1}}$$

ب. يتحقق أن:

$$\frac{A}{B} = \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{\cancel{a_1} \cancel{q} \cdot \frac{\cancel{q^{40}-1}}{q^2-1}}{\cancel{a_1} \cdot q^3 \cdot \frac{\cancel{q^{40}-1}}{q^4-1}} = \frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q^2} \cdot \frac{q^4-1}{q^2-1} = \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{\cancel{(q^2-1)} \cdot (q^2+1)}{q^2 \cancel{(q^2-1)}} = \frac{10}{9} \Rightarrow 10q^2 = 9(q^2+1)$$

$$\Rightarrow 10q^2 = 9q^2 + 9 \Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow q = \pm 3$$

ولكن بما ان a_n تصاعدية اذاً $\boxed{q=3}$

ج- $b_n = 3a_{n+1}$

أي أن $b_1 = 3a_2 \Leftarrow \boxed{b_1 = 3a_1 \cdot \overset{3}{q}} \Leftarrow \boxed{b_1 = 9a_1}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3a_{n+2}}{3a_{n+1}} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q = 3$$

اذاً أساس المتوالية b_n هو 3.

د. المتوالية الجديدة هي:

$$-\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, -\frac{1}{b_3} \dots\dots$$

الحد الأول في هذه المتوالية هو:

$$-\frac{1}{b_1} = \frac{-1}{9a_1}$$

أساس المتوالية الجديدة هو:

$$\frac{\frac{1}{b_2}}{-\frac{1}{b_1}} = -\frac{b_1}{b_2} = -\frac{1}{3}$$

مجموع المتوالية الجديدة:

المتوالية الجديدة متقاربة لذلك ($-\frac{1}{3}$ الأساس)

$$S = \frac{-\frac{1}{b_1}}{1-(-\frac{1}{3})}$$

$$\Rightarrow S = \frac{-\frac{1}{9a_1}}{\frac{4}{3}} = \frac{-3}{4\cdot 9a_1} = \frac{-3}{36a_1} = \frac{-1}{12a_1}$$

$$\boxed{S = \frac{-1}{12a_1}}$$

هـ-(1) المتوالية الجديدة هي: $\frac{1}{a_1}, a_1, b_1$

لكي تكون حسابية يجب ان يتحقق:

$$a_1 - \frac{1}{a_1} = b_1 - a_1$$

$$\Rightarrow \frac{a_1^2 - 1}{a_1} = \overbrace{9a_1 - a_1}^{8a_1} \Rightarrow \frac{a^2-1}{a_1} = 8a_1 \Rightarrow a^2 - 1 = 8a_1^2 \Rightarrow \boxed{7a^2 = -1}$$

a^2 موجب ولا يمكن ان يكون سالب, لذلك غير ممكن ان **تكون حسابية**

(2) بنفس الاسلوب لكي تكون هندسية, يجب ان يتحقق:

$$\frac{a_1}{\frac{1}{a_1}} = \frac{b_1}{a_1} \Rightarrow a_1^2 = \frac{9a_1}{a_1} \Rightarrow a_1^2 = 9 \Rightarrow \boxed{a_1 = \pm 3}$$

$\boxed{\text{ولذلك ممكن ان تكون هندسية}}$

حل سؤال 3

نفرض: P_1 هو احتمال اجتياز العائق الاول

P_2 " " " " الثاني

P_3 " " " " الثالث

حسب المعطيات:

* احتمال اجتياز العائقين الاول والثاني = $28\% = 0.28$

* احتمال اجتياز العائقين الأوليين وعدم اجتياز الثالث (والخروج من المسابقة) مساوٍ لـ 3 اضعاف احتمال الارتقاء للنصف النهائي

أي يتحقق:

$$\underbrace{P\left(\text{اجتياز اول عائقين}\right)}_{0.28} \cdot P\left(\text{عدم اجتياز الثالث}\right) = 3 \cdot P\left(\text{الارتقاء للنصف النهائي}\right)$$

$$0.28 \cdot (1 - P_3) = 3 \cdot 0.28 \cdot P_3$$

الارتقاء للنصف النهائي معناه اجتياز اول عائقين والثالث أيضاً

$$\cancel{0.28}(1-P_3) = \cancel{0.28} \cdot 3P_3$$

$$1-P_3 = 3P_3 \Rightarrow 1 = 3P_3 + P_3 \Rightarrow 1 = 4P_3$$

$$\boxed{P_3 = \frac{1}{4} = 0.25}$$

وبالتالي احتمال ارتقاء متسابق للنصف النهائي هو:

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = 0.28 \cdot 0.25 = 0.07$$

اذاً احتمال ارتقاء طالب للنصف النهائي هو $\boxed{0.07}$

ب. بحسب المعطيات الاحتمال أن يجتاز مشترك العائق الأول وأن لا يجتاز الثاني هو 0.42 أي أنه يتحقق :-

$$P_1(1-P_2)=0.42 \Rightarrow P_1-\underbrace{P_1\cdot P_2}_{0.28}=0.42 \Rightarrow P_1=0.42+0.28$$

اجتياز الأول ← P_1 ، عدم اجتياز الثاني ← $(1-P_2)$

$$\boxed{P_1=0.7}$$

أي أن احتمال اجتيازه العائق الأول هو 0.7

واحتمال عدم اجتيازه للعائق الأول هو $\boxed{1-0.7=0.3}$

ج.1 معطى أن لبيب، جميل وعمر هم ثلاثة مشتركين اجتازوا العائق الأول. ولذلك لكي يصل واحد منهم الى مرحلة نصف نهائي يجب ان يجتاز العائق الثاني والثالث اي الاحتمال ان يصل واحد منهم الى نصف النهائي إذا اجتاز العائق الأول هو: $P_2\cdot P_3 \rightarrow 0.4\cdot 0.25 \rightarrow \boxed{0.1}$

وعندها الاحتمال أن لا يصل الى نصف النهائي اذا اجتاز العائق الأول هو $\boxed{0.9}$ $(1-0.1)$

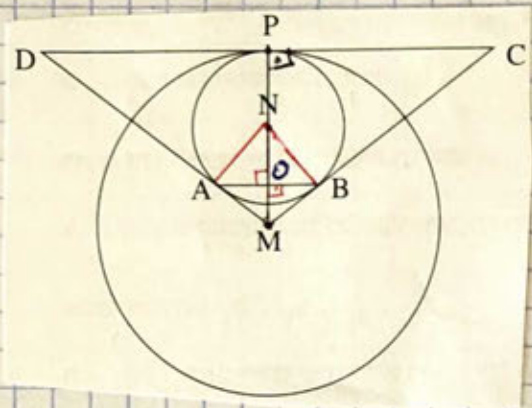
$$P\left(\text{اثنين من بين الثلاثة يصل نصف النهائي}\right)=\binom{3}{2}\cdot(0.1)^2\cdot(0.9)^1=0.027$$

ج.2 الاحتمال أن يرتقي عمر وجميل فقط الى مرحلة نصف النهائي هو :-

$$P\left(\text{فقط عمر وجميل يرتقيان لنصف النهائي}\right)=\underset{\text{عمر يرتقي}}{0.1}\cdot\underset{\text{جميل يرتقي}}{0.1}\cdot\underset{\text{لبيب لن يرتقي}}{0.9}=\boxed{0.009}$$

حل سؤال 4

(أ) ① نرسم انصاف الاقطار NB و NA



② الشكل الرباعي الناتج ANBM هو دالتون :-

انصاف أقطار $AN = NB$

طول المماسين المرسومين $AM = MB$

من نقطة خارج دائرة حتى نقطة التماس متساوي

③ بما ان اقطار الدالتون متعامدة لذلك $AB \perp MN$

وهو المطلوب (أ)

(ب) ④ بما أن المماس عمودي على نصف القطر في نقطة التماس

لذلك $NP \perp DC$ و $MP \perp DC$ وينتج أن N تقع على MP

⑤ $\measuredangle O = \measuredangle P = 90$ وبالتالي زاويتين متناظرتين متساويتين

ينتج أن $AB \parallel DC$

وهو المطلوب (ب)

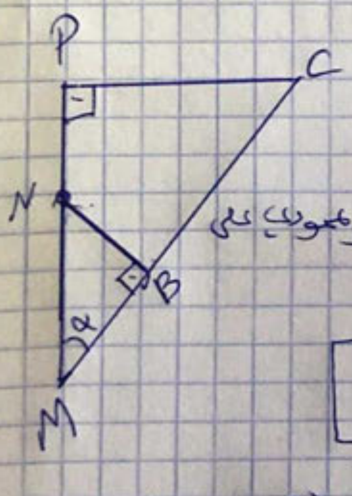
(ج) ⑥ MN القطر الرئيسي في الدالتون ينصف زوايا التي يصل بينها

اي $\measuredangle AMN = \measuredangle BMN$

⑦ MP منصف زاوية وارتفاع في المثلث MDC

ولذلك المثلث MDC متساوي الساقين و P منتصف DC

اي يتحقق $PC = \frac{DC}{2}$



⑧ $\triangle MPC \sim \triangle MBN$

$\measuredangle M = \measuredangle M$ مشتركة $\measuredangle B = \measuredangle P = 90°$ // نصف القطر عمودي على المماس

$\Leftarrow \triangle MPC \sim \triangle MBN$ (ز ز)

من التشابه ينتج $\frac{NB}{PC} = \frac{MN}{MC}$

$NB \cdot MC = MN \cdot PC = \boxed{NB \cdot MC = MN \cdot \frac{DC}{2}}$

وهو المطلوب (ج).

① معطى أن $\frac{R_1}{R_2}=\frac{7}{3}$ $\quad MN=8$

$$\overset{R_1}{\overset{\frown}{MP}} = \overset{8}{\overset{\frown}{MN}} + \overset{R_2}{\overset{\frown}{PN}} \Rightarrow R_1 = 8+R_2$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{8+R_2}{R_2} = \frac{7}{3} \Rightarrow 24+3R_2 = 7R_2$$

$$\Rightarrow 24 = 7R_2 - 3R_2 \Rightarrow 24 = 4R_2 \Rightarrow \boxed{6=R_2}$$

بالتالي:

$$R_1 = 8+R_2 = 8+6 = 14$$

$$\boxed{R_2 = 14}$$

هو المطلوب (د, 1)

ب. بحسب التشابه في البند (أ) يتحقق:

$$\overset{6}{NB}\cdot MC = \overset{8}{MN}\cdot \frac{DC}{2}$$

$$6MC = 4DC \Rightarrow \boxed{1.5MC = DC}$$

$$\boxed{MC = \frac{DC}{1.5}}$$

في المثلث القائم PMC يتحقق:

$$\underbrace{PM^2}_{(6+8)^2} + PC^2 = MC^2 \Rightarrow 14^2 + \left(\frac{DC}{2}\right)^2 = \left(\frac{DC}{1.5}\right)^2$$

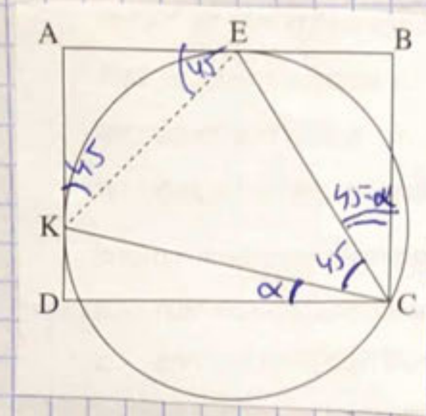
$$\Rightarrow 196 + \frac{DC^2}{4} = \frac{DC^2}{2.25} \quad /\cdot 9 \Rightarrow 1764 + 2.25DC^2 = 4DC^2$$

$$\Rightarrow 1764 = 4DC^2 - 2.25DC^2 \Rightarrow 1764 = 1.75DC^2$$

$$\Rightarrow \frac{1764}{1.75} = DC^2 \Rightarrow 1008 = DC^2 \Rightarrow \sqrt{1008} = DC$$

$$\boxed{DC = 31.749}$$

حل سؤال 5



أ. $AE=AK$ طول المماسين المرسومين
من نقطة خارج دائرة
وحتى نقطة التماس متساوي

اذاً المثلث AKE قائم ومتساوي الساقين
$\measuredangle A=90$ (زاويه مستطيل)
وبالتالي:
$\measuredangle AKE=\measuredangle AEK=\frac{90}{2}=45^\circ$

$\measuredangle AKE=\measuredangle KCE=45^\circ$ زاويه محصورة بين مماس ووتر مساويه
للزاويه المحيطيه المقابله لنفس الوتر.

وهو المطلوب (أ)

ب.

$\measuredangle KCD=\alpha \quad 0<\alpha<45$

$\measuredangle ECB=90-45-\alpha=45-\alpha$

$\boxed{\measuredangle ECB=45-\alpha}$

$\measuredangle B=90^\circ$ زاويه مستطيل

اذاً: في ΔEBC يتحقق:

$\measuredangle EBC=180-90-(45-\alpha)=45+\alpha$

$\boxed{\measuredangle EBC=45+\alpha}$

$\measuredangle AEB=45+\measuredangle KEC+45+\alpha=180^\circ \Rightarrow \boxed{\measuredangle KEC=90-\alpha}$
زاويه مستقيمه

وبالتالي: في ΔKEC

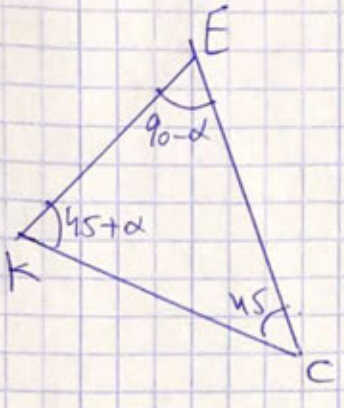
$\measuredangle EKC=180-45-(90-\alpha)$

$\measuredangle EKC=45+\alpha$

اذاً: زوايا المثلث KEC هي

$(\measuredangle KCE=45^\circ)$ $(\measuredangle EKC=45+\alpha)$ $(\measuredangle KEC=90-\alpha)$

2.ب نطبق قانون ال sin في ΔKCE



$$\frac{KE}{\sin 45} = 2R \Rightarrow KE = 2R \cdot \sin 45$$

$$KE = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}R$$

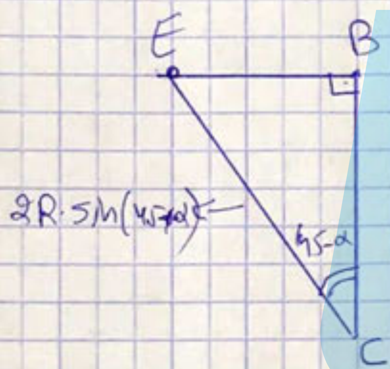
$$\boxed{KE = \sqrt{2}R}$$

$$\frac{KC}{\sin(90-\alpha)} = 2R \Rightarrow KC = 2R \cdot \sin(90-\alpha)$$

$$\boxed{KC = 2R \cdot \cos\alpha}$$

$$\frac{EC}{\sin(45+\alpha)} = 2R \Rightarrow \boxed{EC = 2R \cdot \sin(45+\alpha)}$$

ج. في المثلث EBC:

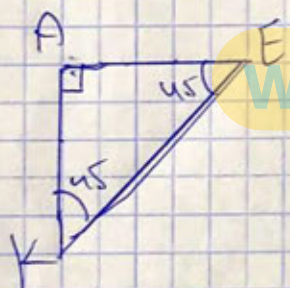


$$\sin(45-\alpha) = \frac{EB}{EC}$$

$$EB = EC \cdot \sin(45-\alpha)$$

$$EB = 2R \cdot \sin(45+\alpha) \cdot \sin(45-\alpha)$$

في المثلث AEK



$KE = \sqrt{2}R$, $AE = AK$

ومنه:

$$\frac{KE}{\sin 90} = \frac{AE}{\sin 45}$$

$$\frac{\sqrt{2}R}{1} = \frac{AE}{\sin 45} \Rightarrow AE = \sqrt{2}R \cdot \sin 45$$

$$AE = \sqrt{2}R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = R \Rightarrow \boxed{AE = R}$$

ولذلك:

$$\frac{EB}{AE} = \frac{2\cancel{R}\sin(45+\alpha) \cdot \sin(45-\alpha)}{\cancel{R}}$$

$$\boxed{\frac{EB}{AE} = 2\sin(45+\alpha) \cdot \sin(45-\alpha)}$$

د. معطى ان

$$\frac{EB}{AE}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{EB}{AE}=2\sin(45+\alpha)\cdot\sin(45-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(90-(45-\alpha))$$

$$\cos(45+\alpha)$$

$$\Rightarrow \underline{2\sin(45+\alpha)\cdot\cos(45+\alpha)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(2(45+\alpha)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(90+2\alpha)=\sin 45$$

$$90+2\alpha=45 \Rightarrow 2\alpha=-45 \Rightarrow \boxed{\alpha=-22.5}$$

α زاوية سالبة. X

أو

$$90+2\alpha=\overbrace{180-45}^{135} \Rightarrow 2\alpha=\overbrace{135-90}^{45}$$

$$2\alpha=45$$

$$\boxed{\alpha=22.5}$$

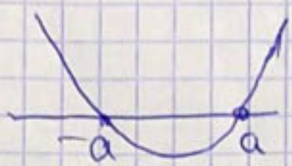
$$\boxed{\alpha=22.5}$$ اذاً

سؤال 6

أ- $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $\quad a>0$

مجال تعريف الدالة هو $x^2-a^2>0 \Leftarrow x^2>a^2$

مجال التعريف:



$\Longrightarrow$ $x>a$ او $x<-a$

ب. $f(-x)=\frac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)^2-a^2}}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}=f(x)$

إذاً $f(-x)=f(x)$ و الدالة زوجية.

ج.1. تقاطع مع y لا يوجد لان الدالة غير معرفة في $\boxed{x=0}$

تقاطع مع x $\Leftarrow y=0$

$0=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} \Longrightarrow x=0$

ولكن الدالة غير معرفة في $x=0$

ولذلك لا يوجد تقاطع مع المحاور

ج.2. الدالة غير معرفة في $x=a$ و $x=-a$ (أطراف المجال)

والبسط لا يساوي صفر في هذه النقاط لذلك

$\boxed{x=a}$ $\boxed{x=-a}$ خطوط تقارب عمودية

خطوط تقارب افقية لا يوجد لان قوى البسط اكبر من المقام

3. أ النقاط القصوى $f'(x)=0$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\sqrt{x^2-a^2}-x^2\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}}{\left(\sqrt{x^2-a}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\sqrt{x^2-a^2}-\frac{x^3}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x^2-a^2}=\frac{2x\cdot(x^2-a^2)-x^3}{(x^2-a^2)\cdot\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3-2ax-x^3}{(x^2-a^2)\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)}=\frac{x^3-2ax}{(x^2-a^2)\cdot\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^3-2ax}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^3-2ax=0 \Rightarrow x(x^2-2a)=0$$

$x=0$ ليس في المجال $\qquad x^2-2a=0$

$$x^2=2a \Rightarrow x=\pm\sqrt{2a} \Rightarrow \boxed{x_1=\sqrt{2a}} \quad \boxed{x_2=-\sqrt{2a}}$$

نصنف النقاط

بما ان المقام موجب لذلك اشارة المشتقة الثانية تحدد بحسب اشارة مشتقة البسط.

نجد مشتقة البسط ونحدد إشارة المشتقة الثانية

$$f''_{\text{البسط}}=3x^2-2a \Rightarrow f'(\sqrt{2a})=3(\sqrt{2a})^2-2a$$

$$\Rightarrow f'(\sqrt{2a})=3\cdot2a-2a=4a>0$$

اذاً: min في $x=\sqrt{2a}$

$$f'(-\sqrt{2a})=3(-\sqrt{2a})^2-2a=3\cdot2a-2a=4a>0$$

ايضاً min في $x=-\sqrt{2a}$

نجد الإحداثي y للنقاط القصوى.

بما ان الدالة زوجية لذلك سيتحقق ان $f(\sqrt{2}a)=f(-\sqrt{2}a)$

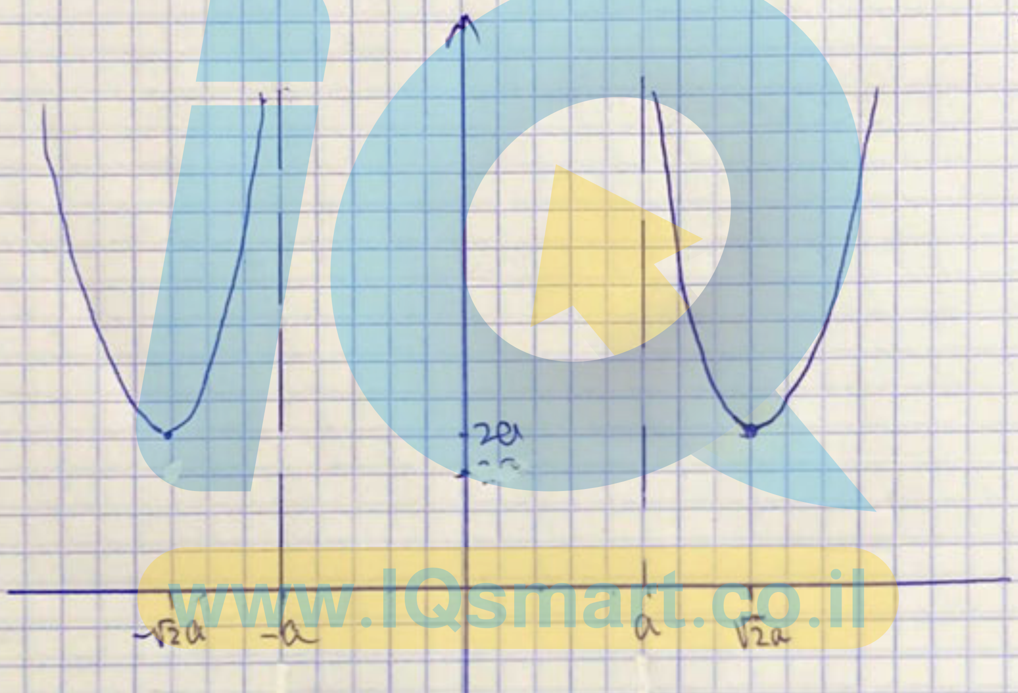
$$f(\sqrt{2}a)=\frac{(\sqrt{2}a)^2}{\sqrt{(\sqrt{2}a)^2-a^2}}=\frac{2a^2}{\sqrt{2a^2-a^2}}=\frac{2a^2}{\sqrt{a^2}}=\frac{2a^2}{a}=2a$$

اذاً:

$$\min(\sqrt{2}a, 2a)$$

$$\min(-\sqrt{2}a, 2a)$$

4.f



٥. بما ان الدالة $f(x)$ موجبة في كل مجال تعريفها لذلك في $f^2(x)$ ستكون كل نقطة الإحداثي y هو تربيع الإحداثي y لنفس النقطة على $f(x)$ ورسمها سيشبه رسم $f(x)$ ونوع النقاط القصوى لن يتغير

وبالتالي النقاط القصوى لـ $f^2(x)$ هي:

$$\min(-\sqrt{2}a,(2a)^2) \Rightarrow \boxed{\min(-\sqrt{2}a,4a^2)}$$

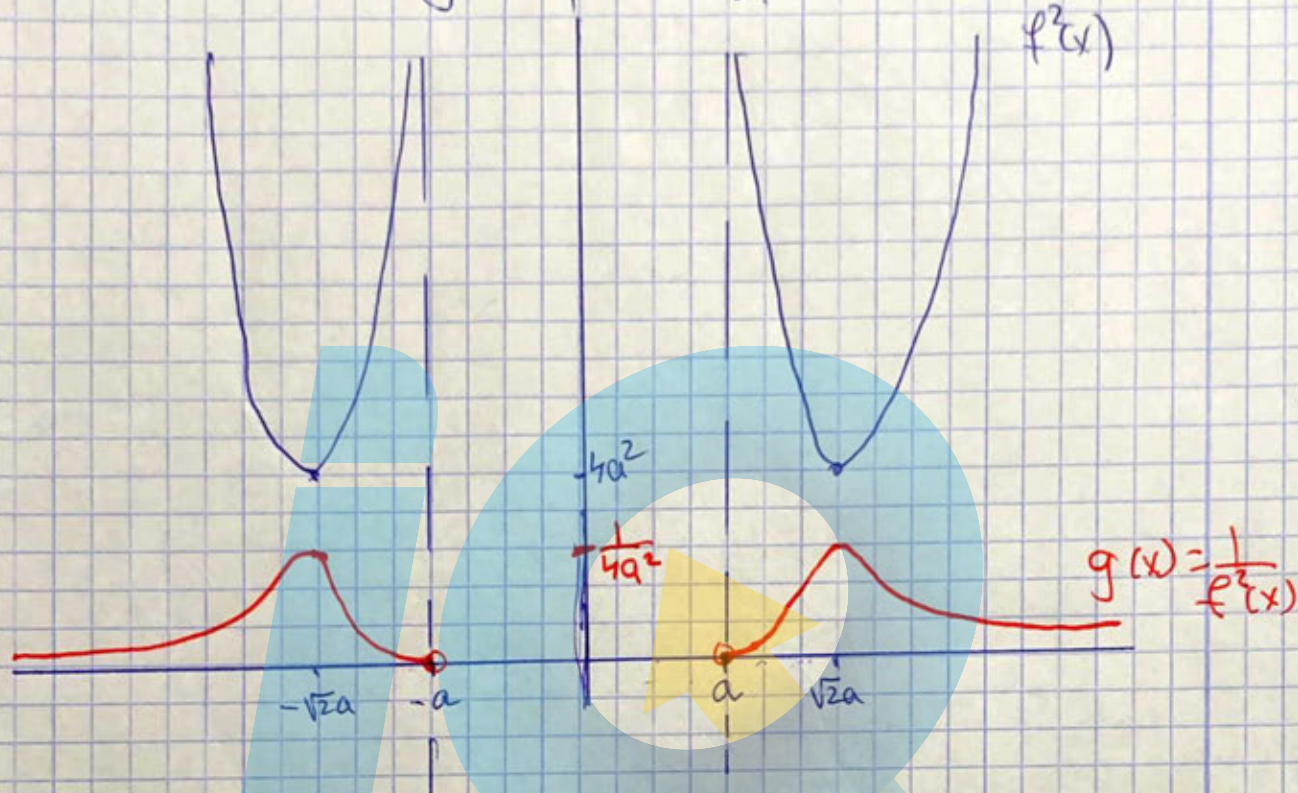
$$\min(-\sqrt{2}a,(2a)^2) \Rightarrow \boxed{\min(-\sqrt{2}a,4a^2)}$$

هـ. $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ ومجال تعريف الدالة $g(x)$ هو نفسه

مجال f. الدالة $g(x)$ هي مقلوب $f^2(x)$.

لكي نرسم $g(x)$ نرسم أولاً $f^2(x)$ وبحسب العلاقة

بين الدالة ومقلوبها نرسم $g(x)$.



في العلاقة بين الدالة ومقلوبها:

1. المجال التصاعدي للدالة يصبح مجال تنازلي لمقلوب الدالة

والمجال التنازلي للدالة يصبح مجال تصاعدي لمقلوب الدالة

2. نقطة מינימום للدالة تصبح מקסימום لمقلوب الدالة

والعكس صحيح (بشرط أن لا تكون نقاط صفرية)

3. $f^2(a)\Rightarrow\infty$ لذلك $g(a)=\frac{1}{f^2(a)}=\frac{1}{\infty}\to 0$ وكذلك الأمر

بالنسبة لـ $g(-a)$. ولذلك $(a,0)$ نقطة و $(-a,0)$ نقطة

$\boxed{\text{* انتبه } g(a)=g(-a)=0 \text{ ولكن } f^2 \text{ غير معرفة}}$

4. $f^2(x)\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}\infty \Rightarrow g(x)\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\infty}\to 0$

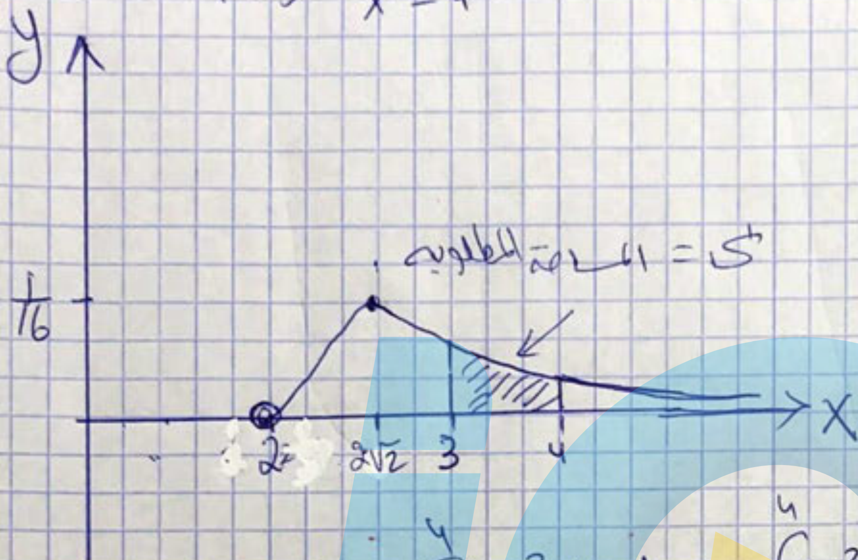
إذاً $y=0$ خط تقارب أفقي للدالة $g(x)$

$\boxed{a=2}$ 9

حل ٢

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$f^2(x)=\frac{x^4}{x^2-4} \Longrightarrow g(x)=\frac{1}{f^2(x)}=\frac{x^2-4}{x^4}$$



$$S=\int_3^4 \frac{x^2-4}{x^4}\,dx=\int_3^4 \frac{x^2}{x^4}-\frac{4}{x^4}\,dx$$

$$=\int_3^4\left(\frac{1}{x^2}-4\cdot x^{-4}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}-(-4)\cdot\frac{x^{-3}}{-3}\right]_3^4$$

$$=\left[\frac{4}{3}x^{-3}-\frac{1}{x}\right]_3^4=\left[\frac{4}{3x^3}-\frac{1}{x}\right]_3^4=$$

$$\left(\frac{4}{3\cdot4^3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{4}{3\cdot3^3}-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{4}{\underbrace{3\cdot4^2}_{48}}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{4}{81}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{12}-\frac{3}{12}}-\left(\frac{4}{81}-\frac{27}{81}\right)=\left(\frac{-2}{12}\right)-\left(\frac{-23}{81}\right)=\frac{71}{1296}$$

حل سؤال 7

أ1. مجال تعريف الدالة:

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sin x}+3$$

هو $\sin x \neq 0$ في المجال $0 \le x \le 2\pi$

أي ان:

$x \neq \pi k$

$k=0 \rightarrow \boxed{x\neq 0}$ $\quad k=1 \rightarrow \boxed{x \neq \pi} \rightarrow k=2 \rightarrow \boxed{x \neq 2\pi}$

اذاً مجال تعريف الدالة هو $\boxed{x \neq 0, \pi, 2\pi}$

أو يمكن كتابته كالتالي $\pi<x<2\pi$ او $0<x<\pi$

أ2. بما أن $\cos^2 x \neq 0$ في كل واحدة من النقاط التي فيها $\sin x=0$ (أي $(0,\pi,2\pi)$) لذلك معادلات خطوط التقارب العامودية للمحور x هي

$\boxed{x=0}$ $\quad \boxed{x=\pi}$ $\quad \boxed{x=2\pi}$

خطوط تقارب افقية لا يوجد

أ3. نجد $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{(2\cdot(-\sin x)\cdot\cos x)\cdot\sin x-\cos^2 x\cdot(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$f'(x)=\frac{-2\sin^2 x\cdot\cos x-\cos^2 x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\cos x\,(2\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$f'(x)=\frac{-\cos x\cdot(\sin^2 x+\overbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}^{1})}{\sin^2 x}=\frac{-\cos x\,(\sin^2 x+1)}{\sin^2 x}$$

اذاً: $$f'(x)=\frac{-\cos x\,(\sin^2 x+1)}{\sin^2 x}$$

$$f'(x)=0 \Longrightarrow -\cos x\,(\sin^2 x+1)=0$$

$$-\cos x = 0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$k=0 \quad x=\frac{\pi}{2}$

$k=1 \quad x=\frac{3\pi}{2}$

$k=2 \longrightarrow$ خارج المجال

$$\sin^2 x+1=0$$

$$\sin^2 x=-1$$

لا يوجد حل لأن $\sin^2 x \geq 0$

لكل x في المجال

إذاً نقاط الشك هي $x=\frac{\pi}{2}$ أو $x=\frac{3\pi}{2}$

نفحص النقاط بواسطة جدول !

المقام في المشتقة $f'(x)$ دائماً موجب ولذلك

إشارة المشتقة في النقاط الشك تحدد من إشارة

بسط المشتقة لذلك نعوض النقاط في البسط فقط

$$f'(x)=-\cos x\,(\sin^2 x+1)$$

المركب $\sin^2x+1$ دائماً موجب ولذلك إشارة المشتقة

تحدد من المركب $-\cos x$

$x=\frac{\pi}{3}$

x	0	$0<x<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	π	$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	min	↗		↗	max	↘	

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}<0$ // $f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)>0$ // $f'\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\underbrace{-\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)}_{+}$

$$f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)<0$$

إذاً: المجالات التصاعدية $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ أو $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$

المجالات التنازلية $0<x<\frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$

أ.ج

نجد إحداثيات النقاط القصوى

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{2}}+3=\frac{0}{1}+3=3$$

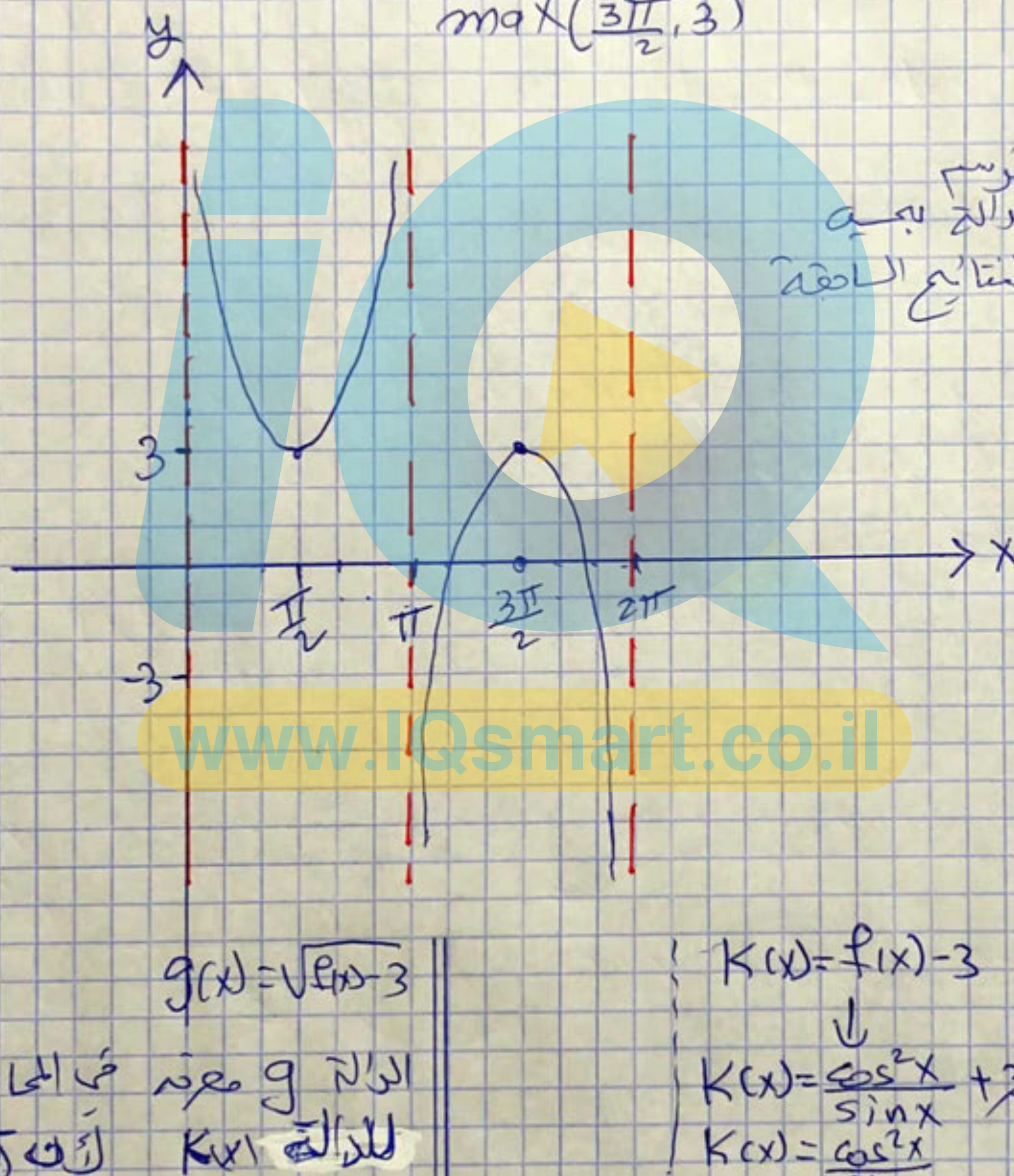
$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}+3=0+3=3$$

لذلك:

$$\min\left(\frac{\pi}{2},3\right)$$

$$\max\left(\frac{3\pi}{2},3\right)$$

ب) نرسم الدالة بحسب النتائج السابقة



ج: $K(x)=f(x)-3$

$$\Downarrow$$

$$K(x)=\frac{\cos^2 x}{\sin x}+\cancel{3-3}$$

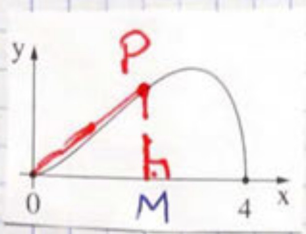
$$K(x)=\frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

أي ان $K(x)$ عبارة عن ازاحة 3 وحدات الى الاسفل لـ $K(x)$ وبالتالي الرسم الملائم لها $\boxed{\text{هو (٢)}}$ النقاط القصوى تصبح نقاط صفرية

$$g(x)=\sqrt{f(x)-3}$$

الدالة g معرفة في المجال الموجب للدالة $K(x)$ لأن $g(x)=\sqrt{K(x)}$ وبالتالي رسم $g(x)$ مشابه لرسم $K(x)$ في المجال الموجب لانه $\sqrt{K(x)}$ أي الجذر بلا غه هو (١)

حل سؤال 8



1. أ $f(x)=\sqrt{ax^4+bx^3}$

بحسب الرسم المرفق فإن النقطة (4,0) تقع على الدالة أي تحقق تمثيلها الجبري

$$f(4)=\sqrt{a\cdot4^4+b\cdot4^3}=0$$

$$\Rightarrow a\cdot4^4+b\cdot4^3=0 \Rightarrow 4^3(4a+b)=0$$

$$\Rightarrow 4a+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-4a}$$

2. أ بما ان الدالة $f(x)$ معرفة في المجال $0\le x\le4$ أي ان التعبير تحت الجذر موجب وهذا معناه انه لكل x بين $[0,4]$ سيتحقق $ax^4+bx^3>0$ نعوض $x=1$ ونحصل على:

$$a\cdot1^4+b\cdot1^3>0$$

$$a+b>0 \Rightarrow a+(-4a)>0 \Rightarrow -3a>0$$

$$\Rightarrow \boxed{a<0}$$

اذاً $a<0$ وبالتالي $b>0$ والادعاء الصحيح هو II

ب. الدالة $f^2(x)$ هي $g(x)=f^2(x)=ax^4+bx^3$

النقطة P تقع على $f^2(x)$ ولذلك يمكن كتابة احداثياتها كالتالي: $P(k,ak^4+bk^3)$ أو $P(k,ak^4-4ak^3)$

مساحة المثلث PMO تحقق:

$$S_{\Delta PMO}=\frac{PM\cdot MO}{2}$$

احداثيات النقطة M هي $M(k,0)$ (نفس الاحداثي x لـ P)

$$PM=a\cdot k^4-4ak^3-0=ak^4-4ak^3=ak^3(k-4)$$

$$MO=k$$

$$S_{\Delta PMO}(k) = \frac{k(ak^4-4ak^3)}{2} = \frac{ak^5-4ak^4}{2}$$

$$S'(k) = \frac{5ak^4-16ak^3}{2} = 0 \Rightarrow 5ak^4-16ak^3=0$$

$$\Rightarrow ak^3(5k-16)=0 \Rightarrow 5k-16=0 \Rightarrow \boxed{k=\frac{16}{5}=3.2}$$

$$(k\neq 0 \to ak^3\neq 0)$$

نبين ان $k=3.2$ تعطينا מקסימום مساحة

نحسب $S''(k)$:

$$S''(k) = \frac{20ak^3-48k^2}{2}$$

$$S''(k) = 10ak^3-24k^2 \Rightarrow S''(3.2) = 10a(3.2)^3-24(3.2)^2 = 81.9a$$

وبما أنّ a سالب اذاً $S''(3.2)<0$ و $k=3.2$ מקסימום.

ج.

$$S(3.2) = \frac{a(3.2)^5-4a(3.2)^4}{2} = \frac{335.544a-419.43a}{2}$$

$$S(3.2) = \frac{83.89a}{2} = \boxed{41.94a}$$ المساحة القصوى

د. نحسب المعطى الاصداتي x للنقطة P موجود بالمجال غير التنازلي لـ $f^2(x)$

بما أن $f(x)$ موجبة في المجال $0<x<4$ اذاً الـ $f^2(x)$ و $f(x)$

سيكون نفس نوع النقاط القصوى.

$$g(x) = f^2(x) = ax^4+bx^3 \Rightarrow g'(x) = a\cdot 4x^3+3\cdot(-4a)x^2$$

$$g'(x) = 4ax^3-12ax^2 = 0 \to 4ax^2(x-3)=0$$

غير ملائم يشطب $\Leftarrow x=0$ $\boxed{x=3}$

بالتالي $f^2(x)$ ليست تنازلية في المجال $0\le x\le 3$

و دالة المساحة $S(k)$ تصاعدية في المجال $0<k<3.2$

و بالتالي $x=3$ هو מקסימום מוחלט للدالة